Για καμπύλες

Είχαμε δει:

18/12/17

Κλείσιμο της παρένθεσης για καμπύλες.
(παραμ καμπύλη) $\bar{f}: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, σ.ls.
κανονική καμπύλη $\bar{f}$ C^1 (δηλ σ.ls διαφορίσιμη) με
$\bar{f}'(t) \neq \bar{0}$ $\forall t \in I$
εφαπτόμενο διάνυσμα. (διάνυσμα ταχύτητας).
μήκος C^1 καμπύλης $L(\bar{f}) = \int_a^\beta \|\bar{f}'(t)\| \, dt$, $\bar{f}: [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$
ταχύτητα, τύπος

αναπαραμετρικοποίηση καμπύλης: $\bar{\xi} = \bar{f} \circ \varphi \; [A,B] \to \mathbb{R}^n$
με $\varphi: [A,B] \to [a,\beta]$ 1-1 και επί σ.ls.
(για κανονικές καμπύλες, συνήθως, φ (ο παραμετρικός μετασχηματισμός ξ) είναι C^1)
Όταν φ αύξουσα ο παρα. μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό. Όταν φ φθίνουσα τον αντιστρέφει.
Ένας ειδικός παρ. μετασχηματισμός είναι ο
$\varphi(\tau) = a + \beta - \tau$, $\tau \in [a,\beta]$, ο οποίος αντιστρέφει την καμπύλη $\bar{f}^{\ominus}(\tau) = \bar{f}(a+\beta-\tau)$, $\tau \in [a,\beta]$
αντίστροφη καμπύλη.
Π.χ αν $\bar{f}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$, $\bar{b} \neq \bar{a}$, $t \in [0,1]$.
η αντίστροφη καμπύλη είναι $\bar{f}^{\ominus}(\tau) =$
$= \bar{f}(1-\tau) = \bar{a} + (1-\tau)(\bar{b} - \bar{a}) = \bar{b} + \tau(\bar{a} - \bar{b})$
Επίσης ~~μπορούμε~~ παρατηρούμε ότι $\bar{f}'(t) = \bar{b} - \bar{a}$
και $\bar{f}^{\ominus\prime}(\tau) = \bar{a} - \bar{b}$ ($\Rightarrow \|\bar{f}'(t)\| = \|\bar{b} - \bar{a}\|$ σταθερά.
(δηλ ο $\varphi(\tau) = a + \beta - \tau$, πράγματι αντιστρέφει τον προσανατολισμό [δηλαδή με ποια σειρά διατρέχουμε τα σημεία της $\bar{f}([a,\beta]) = C \subset \mathbb{R}^n$].
αφού $\varphi'(\tau) = -1 < 0$ ($\Rightarrow \varphi$ φθίνουσα).
και έχει μήκος $L(\bar{f}) = \int_0^1 \|\bar{b} - \bar{a}\| \, dt = \|\bar{b} - \bar{a}\|$
ποι] Τι συμβαίνει με τον κύκλο $\bar{f}(t) = r(\cos t, \sin t)$
$t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$ αν θεωρήσω την αντίστροφη $\bar{f}^{\ominus}(\tau)$

* $\cos(a+\beta) = \cos a \cos\beta - \sin a \sin\beta$
* $\sin(a+\beta) = \sin a \cos\beta + \sin\beta \cos a$

Λύση

Απο ορο τυπος $\quad f^{\Theta}(\tau) = f(2\pi - \tau) =$

$$= r\left(\cos(2\pi-\tau), \sin(2\pi-\tau)\right), \quad \tau \in [0, 2\pi]$$

Εφαρμοστυ τυπος

$$= \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\underbrace{\cos(-\tau)}_{=\cos\tau} - \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\sin(-\tau) = \cos\tau$$

άρα $f^{\Theta}(\tau) = r(\cos\tau, -\sin\tau), \tau \in [0,1]$

$$= \underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\cos(-\tau) + \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\underbrace{\sin(-\tau)}_{=-\sin\tau} = -\sin\tau$$

$f(0) = f(2\pi)$

$= f^{\Theta}(0) = f^{\Theta}(2\pi) \qquad \tau \in [0,1].$

$f'(t) = r(-\sin t) \Rightarrow f'(0) = r(0,1)$

$f^{\Theta\prime}(\tau) = r(-\sin\tau, -\cos\tau) \Rightarrow f^{\Theta\prime}(0) = r(0,-1)$

Για την αναπαραμετρικοποιημένη ~~καμ~~ καμπύλη

$\tilde{f} = f \circ \varphi : [A,B] \to \mathbb{R}^n$ έχαμε (αν είναι C^1)

$\tilde{f}'(\tau) = f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$

αν φ αύξουσα / φθίνουσα, τότε θετικό / αρνητικό ~~θετικό αρνητικό~~

($\Rightarrow$ δεν αλλάζει / αλλάζει την κατεύθυνση της f)

και επίσης $L(\tilde{f}) = L(f) =: L(c) = f([a,\beta]) =$
$= \tilde{f}([A,B])$ αν η f είναι απλή (ή απλή κλειστή)
(όπου διατρέχαμε («τρέχαμε») το c μία μόνο φορά).

Για κανονικές καμπύλες $s(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau, \tau \in [a,\beta]$
συνάρτηση μήκους τόξου της f $[a,\beta] \to \mathbb{R}^n$

Η s^{-1} είναι παραμ. μετασχηματισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό (βλ. σημειώσεις), και η $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ ονομάζεται παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου
$\Rightarrow \|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$.

Ασκησ από εδώ υλης

Το καλύτερο μια καμπύλη να είναι κανονική ή τάξης C^1
$\Rightarrow \gamma'$ σ.ί.σ. η $\gamma'(t) \neq \bar{0} \Leftrightarrow$ (μπορώ να την αναπαραμετρικοποιήσω ως προς μήκος τόξω). γ' σ.ί.σ.

Τι γίνεται με καμπύλες;

Απάντηση:

Μπορούμε να ενώσουμε καμπύλες ή αλλιώς π.χ. μια πολυγωνική γραμμή, να τη σπάσουμε σε ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία όμως είναι ενωμένα. $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_n$

μήκος $L(\gamma) = \sum L(\gamma_i)$

Π.χ. $U=(0,1)\times(0,1) \Rightarrow \partial U = \{\underbrace{(t,0)}_{=\gamma_1(t)} : t\in[0,1]\}$

$\cup \{\underbrace{(1,0)+t(0,1)}_{=\gamma_2(t)} : t\in[0,1]\}$

$\cup \{\underbrace{(1,1)+t(-1,0)}_{=\gamma_3(t)} : t\in[0,1]\}$

$\cup \{\underbrace{(0,1)+(0,-1)}_{=\gamma_4(t)} : t\in[0,1]\}$

$= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

$C_i = \gamma_i([0,1])$

$\boxed{\text{Τέλος με καμπύλες}}$

~~Π.χ. $U=(0,1)\times(0,1) \Rightarrow \partial$~~

Τι λέγαμε πριν από τις καμπύλες;

Λέγαμε για μερικές παραγώγους, παραγώγους, παραγώγους κατά κατεύθυνση (κυρίως για $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό).

Τι σημαίνουν αυτά γεωμετρικά;

Παράδειγμα: $f: U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

γράφημα $\Rightarrow \Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\}$

(αν η f είναι C^1 και το U ανοιχτό, είναι μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$).

Η $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ δίνει την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη της τομής του γραφήματος με το επίπεδο $y=y_0$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in \Gamma_f$

Η εφαπτομένη (ευθεία) είναι η

$$z = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\underline{y=y_0} \quad ; x \in \mathbb{R}$$

βρίσκεται (η εφαπτομένη) στο επίπεδο αυτό.

Αντίστοιχα η $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο ίδιο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, της καμπύλης $\{x=x_0\} \cap \Gamma_f$

και έχει εξίσωση $z = f(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), x=x_0, y \in \mathbb{R}$

Παρατήρηση $\boxed{(= \text{Αρχή} \quad \Delta.\Gamma).}$

Οι 2 εφαπτόμενες ευθείες τέμνονται στο $(x_0,y_0, f(x_0,y_0)) \in \Gamma_f$ βρίσκεται ~~σε~~ κάθε μία σε ένα επίπεδο, το οποίο είναι κάθετα και ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο που τις περιέχει με τύπο

$$z = f(x_0,y_0) + \underbrace{(x-x_0, y-y_0)\cdot \nabla f(x_0,y_0)}_{\text{κλίση}}$$

$$= (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

∇

το εφαπτόμενο επίπεδο της f (του Γ_f) στο σημείο (x_0,y_0) ή ίδιο (στο σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.